Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézet

Doktori értekezés tézisei

Algebraic and analytic methods in graph theory

(Algebrai és analitikus módszerek a gráfelméletben)

Hubai Tamás

Matematika Doktori Iskola
Iskolavezető: Laczkovich Miklós

Elméleti Matematika Doktori Program
Programvezető: Szűcs András

Témavezető: Lovász László

ELTE TTK Számítógéptudományi Tanszék

2014. augusztus

Az értekezés két fő témát jár körül. Az első részben gráfpolinomok gyökeit vizsgáljuk Benjamini-Schramm konvergens gráfsorozatokon, különös tekintettel a kromatikus és a párosítás-polinomra. A második részben a pozitív gráfokra javaslunk egy lehetséges strukturális jellemzést, amit néhány speciális esetben be is bizonyítunk. A két területet az algebrai és analitikus módszerek használata köti össze, mint például a homomorfizmusszámok és mértékek, vagy a konvergencia, a momentumok, a kvantumgráfok és a spektrálelmélet.

Egy véges G gráfra jelölje $\mathrm{ch}_G(q)$ a lehetséges q-színezések számát. Ez q-nak egy polinomja, amit Birkhoff [9] fedezett fel és G *kromatikus polinomjának* nevezzük. Míg a polinom egyes együtthatói, gyökei és helyettesítési értékei G klasszikus gráfelméleti jellemzőinek felelnek meg, a kromatikus gyökök fontos szerepet játszanak a statisztikus fizikában is, ahol az antiferromágneses Potts-modell viselkedését írják le a nulla hőmérséklet közelében. A fizikusokat különösen érdekli az ún. termodinamikai limesz, vagyis az a speciális eset, amikor a G gráf egy rács, aminek a mérete a végtelenhez tart.

Az elmúlt évtizedben a konvergens gráfsorozatok fontos szerepet kaptak a matematikában. Több olyan elmélet is megjelent, ami az internet, a szociális hálózatok és a biológában, fizikában illetve az ipari alkalmazásokban szereplő hálózatok jobb megértését szolgálja. Ezeknek az elméleteknek a közös vonása, hogy adott egy nagyon nagy gráf, amit nem tudunk a gyakorlatban feldolgozni, vagy esetleg az éleit sem ismerjük teljes bizonyossággal, viszont tudunk belőlük valamilyen módon mintát venni és ez alapján kisebb gráfokat gyártani, amik szerkezetileg hasonlóak az eredetihez abban az értelemben, hogy ugyanazokat a mintákat adják. Ha egy gráfsorozat mintái tetszőlegesen megközelítik az eredeti gráféit, akkor azt mondjuk, hogy a sorozat konvergál az eredeti gráfhoz.

A két legelterjedtebb elmélet a sűrű gráfok konvergenciájával foglalkozó, Lovász és Szegedy [38] nevéhez fűződő elmélet, illetve a fokszámkorlátos gráfok konvergenciájának elmélete, amit Benjamini és Schramm [8] vezetett be. Az utóbbi a korábban már említett termodinamikai limeszt is általánosítja. Véges gráfok egy G_n sorozatát *Benjamini-Schramm értelemben konvergensnek* nevezzük, ha bármely pozitív R és véges gyökeres α gráf esetén annak a valószínűsége, hogy G_n egy egyenletesen véletlenül választott csúcsának R sugarú környezete α-val izomorf, konvergens. Más szóval nagy n-re és n'-re nem tudjuk G_n-t és $G_{n'}$-t statisztikailag megkülönböztetni egy véges sugarú mintavétellel. Például a $\mathbb{Z}^d$ végtelen kockarácsot megközelíthetjük Benjamini-Schramm értelemben olyan téglákkal, amiknek az oldalhosszai a végtelenhez tartanak.

A 2. fejezetben, ami Abért Miklóssal közös eredményeket tartalmaz, a kromatikus gyökök viselkedését vizsgáljuk Benjamini-Schramm konvergens gráfsorozatokon. Ehhez definiáljuk a kromatikus *gyökmértéket* a gyökökön vett egyenletes eloszlásként. Megmutatjuk, hogy egy konvergens gráfsorozatra a gyökmérték is konvergens lesz a megfelelő értelemben.

A legtermészetesebb lehetőség a gyenge konvergencia lenne, vagyis az, hogy tetszőleges folytonos függvény integrálja a mérték szerint konvergens. Ez azonban általában nem igaz, mert például az utak és a körök sorozata összefésülve is BS-konvergens, viszont a két mértéksorozat különböző limeszhez tart. Ehelyett a mértékek *holomorf momentumainak konvergenciáját* bizonyítjuk be, vagyis azt, hogy a holomorf függvények integrálja a mérték szerint konvergens. Számos speciális esetben egy külön érveléssel meg lehet mutatni, hogy a gyökök egy szűkebb halmazra korlátozódnak, ahol a holomorf momentumok konvergenciájából már automatikusan következik a gyenge konvergencia is.

A bizonyítás fő eszköze a homomorfizmusok számolása. Egy F és G véges gráfra jelölje $\hom(F, G)$ a $V(F)$-et $V(G)$-be képező éltartó leképezések számát. A kromatikus gyökmérték momentumai felírhatók összefüggő gráfokból vett homomorfizmusszámok lineáris kombinációjaként. Például a harmadik momentum

$$p_3(G) = \tfrac{1}{8}\hom(K_2, G) + \tfrac{3}{4}\hom(P_3, G) + \tfrac{1}{4}\hom(K_3, G) -$$
$$\tfrac{3}{8}\hom\left(C_4, G\right) + \tfrac{3}{4}\hom(K_4^-, G) - \tfrac{1}{8}\hom\left(K_4, G\right).$$

Mivel ezek a homomorfizmusszámok normalizálás után konvergensek, így maguk a momentumok is, vagyis megkapjuk a gyökmértékek konvergenciáját. Az is következik, hogy a kromatikus polinom normalizált logaritmusa, az ún. szabadenergia, egy analitikus függvényhez tart az origó egy környezetén kívül, ami megválaszolja Borgs [10] egy kérdését.

Az utóbbi időben Csikvári Péter és Frenkel Péter [16] kiterjesztette az eredményeinket egy sokkal tágabb polinomosztályra, a korlátos exponenciális típusú multiplikatív gráfpolinomokra. A kromatikus polinomon kívül ez tartalmazza a Tutte-polinomot, a módosított párosítás-polinomot, az adjungált polinomot és a Laplace-mátrix karakterisztikus polinomját.

Ezen általánosítás fényében vizsgáljuk a párosítás-mértéket a 3. fejezetben, ami Abért Miklóssal és Csikvári Péterrel közös kutatás. Egy véges G gráf *párosítás-polinomja*

$$\sum_k (-1)^k m_k(G) x^{|V(G)|-2k},$$

ahol $m_k(G)$ jelöli a pontosan k élű párosítások számát G-ben. A párosítás-polinomnak szintén van statisztikus fizikai jelentősége, ez az ún. monomer-dimer modellnek felel meg. A 2. fejezethez hasonlóan definiálhatjuk a párosítás-mértéket a párosítás-polinom gyökein vett egyenletes mértékként, és mivel a Heilmann-Lieb tétel [32] szerint a gyökök a valós számegyenes egy kompakt részére esnek, így a Csikvári-Frenkel eredményből rögtön gyenge konvergenciát kapunk, ezzel automatikusan kiterjesztve a definíciót végtelen csúcstranzitív rácsokra is.

Egy L végtelen csúcstranzitív rácson azonban közvetlenül is definiálhatjuk a párosításmértéket a spektrálelmélet segítségével. L v-ből induló *útfája* legyen az a gráf, aminek a csúcsai a v-ből induló L-beli utak, és két utat akkor kössünk össze, ha az egyik a másikból egy lépés hozzáfűzésével kapható. Ez természetesen egy fát definiál, és a 3. fejezetben megmutatjuk, hogy L imént definiált párosítás-mértéke megegyezik ennek a fának a spektrálmértékével.

Ezen kívül kifejezzük az euklideszi rácsokon vett monomer-dimer modellek szabadenergiáját a rácsok párosítás-mértékeiből, ami alapján új, erős becsléseket adhatunk rájuk. Bár a szabadenergiát általában a Mayer-sorfejtésből szokták számolni, a mi módszerünk előnye abban rejlik, hogy néhány függvényt akkor is ki tudunk integrálni a párosításmérték szerint, amikor a megfelelő Mayer-sorfejtés nem konvergál.

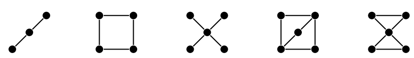
Általában nem ismert explicit képlet magukra a párosítás-mértékekre, csak néhány speciális esetben, mint például a végtelen d-reguláris fa esetén. Meg tudjuk mutatni azonban, hogy a végtelen rácsok egy tág osztályán a párosítás-mérték mindig atommentes.

A 4. fejezetben a pozitív gráfokkal foglalkozunk, ez Omar Antolín Camarenával, Csóka Endrével, Lippner Gáborral és Lovász Lászlóval közös munka. Ehhez a 2. fejezetben már vizsgált a homomorfizmusszámokat használjuk, de ezúttal kiterjesztjük a definíciót súlyozott célgráfokra. Ha a G gráf minden ij éléhez egy w_{ij} valós súly tartozik, akkor

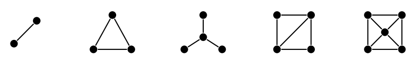
$$\hom(F,G) = \sum_{\varphi: V(F)\to V(G)} \prod_{ij\in E(F)} w_{\varphi(i)\varphi(j)}.$$

Tetszőleges valós élsúlyokkal könnyen előfordulhat, hogy ez a homomorfizmusszám negatív lesz. Azonban bizonyos F gráfokra azt látjuk, hogy $\hom(F,G)$ mindig nemnegatív a G súlyozott gráf választásától függetlenül. Az ilyen F-eket *pozitív gráfoknak* nevezzük.

A következő gráfok például pozitívak:



míg az alábbiak nem azok:



Például K_3 azért nem pozitív, mert ha G-t K_3 egy olyan példányának definiáljuk, ahol minden élsúly -1, akkor $\hom(K_3,G) < 0$. A példából azt is látszik, hogy ha egy gráfnak páratlan sok éle van, akkor nem lehet pozitív.

De miért lesz a 4 hosszú kör pozitív? Fejtsük ki:

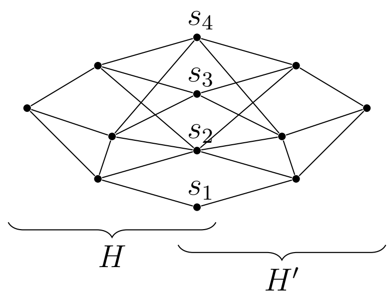
$$\hom(C_4,G) = \sum_{\varphi} w_{\varphi(1)\varphi(2)} w_{\varphi(2)\varphi(3)} w_{\varphi(3)\varphi(4)} w_{\varphi(4)\varphi(1)} =$$

$$= \sum_{\substack{\varphi(1)\\ \varphi(3)}} \Big(\sum_{\varphi(2)} w_{\varphi(1)\varphi(2)} w_{\varphi(2)\varphi(3)} \Big) \Big(\sum_{\varphi(4)} w_{\varphi(3)\varphi(4)} w_{\varphi(4)\varphi(1)} \Big) =$$

$$= \sum_{\substack{\varphi(1)\\ \varphi(3)}} \Big(\sum_{\varphi(2)} w_{\varphi(1)\varphi(2)} w_{\varphi(2)\varphi(3)} \Big)^2$$

Ha két átellenes csúcs képét rögzítjük, tetszőleges G célgráfba menő homomorfizmusszám felírható négyzetként. Tehát a teljes homomorfizmusszám egy négyzetösszeg és ennélfogva nemnegatív.

Ez a konstrukció is általánosítható. Tegyük fel, hogy a H gráfban az $s_1, s_2, \dots, s_k$ csúcsok független halmazt alkotnak. Legyen H' a H egy diszjunkt példánya, és azonosítsunk minden s_i csúcsot az s_i' másolatával. Egy így kapott F gráfot *szimmetrikusnak* nevezünk.



Amint az s_i-k képét rögzítjük, H-nak és H'-nek ugyanannyi homomorfizmusa lesz a G célgráfba, egymástól függetlenül. Így a teljes homomorfizmusszám megint egy négyzetösszeg, tehát minden szimmetrikus gráf pozitív.

Azt sejtjük, hogy ez a következtetés valójában egy ekvivalencia, vagyis a pozitív gráfok is mind szimmetrikusak.

Ha általában nem is, de néhány speciális esetben be tudjuk bizonyítani a sejtést. Ehhez bevezetünk egy particionálási technikát, amivel megmutathatjuk egy gráfról, hogy biztosan nem pozitív. Az alapötlet az, hogy megszorítjuk, hova képződhetnek az egyes csúcsok. Itt egy egyszerűsített változatot írok le. Színezzük ki F és G csúcsait és nézzük csak azokat a homomorfizmusokat, amik megtartják a színeket. Léteznek olyan színezett F gráfok, amiknek minden színezett és élsúlyozott G-be nemnegatív a homomorfizmusszámuk, és ez természetesen nem függhet a konkrét színektől, csak a színosztályok alkotta $\mathcal{N}$ partíciótól. Az ilyen $\mathcal{N}$-eket $V(F)$ *pozitív partícióinak* nevezzük. (A pontos, analitikus definíció a 4. fejezetben olvasható.)

A pozitív partíciókon több olyan műveletet is végezhetünk, ami megtartja a pozitivitásukat. Ilyen például az osztályok egyesítése, vagy az F alapgráf megszorítása néhány osztály uniójára. Fel is bonthatunk egy osztályt a benne szereplő csúcsok fokszáma szerint, vagy akár aszerint, hogy hány él megy belőlük egy adott másik osztályba.

Ha F triviális partíciójából kiindulva újra és újra felosztjuk az osztályokat ezekkel a műveletekkel, megkapjuk F *sétafa-partícióját*, ahol két csúcs akkor és csak akkor tartozik egy osztályba, ha F univerzális fedése ebből a két csúcsból nézve izomorf. Ha tehát egy pozitív gráfot megszorítunk az sétafa-partíciójából néhány osztály uniójára, akkor továbbra is pozitív gráfot kapunk. Ebből rögtön következik a sejtés fákra, és némi számítógépes segítséggel azt is megkapjuk, hogy minden legfeljebb 10 csúcsú gráfra igaz a sejtés, egyetlen lehetséges kivétellel.

A fejezetet néhány, a pozitív gráfokra vonatkozó állítással zárjuk, mint például hogy létezik olyan homomorf képük, amiben legalább feleannyi csúcs szerepel, mint az eredeti gráfban és minden élnek páros sok ősképe van.

Eredmények a 2. fejezetből:

Egy G egyszerű gráfra legyen G *kromatikus mértéke*, μ_G, az egyenletes mérték a kromatikus polinom gyökein. Sokal egyik tétele [46] szerint μ_G tartója a

$$D = B(0, Cd)$$

körlap része, ahol d a G maximális fokszáma és $C < 8$ egy abszolút konstans.

2.1. Tétel. *Legyen (G_n) egy d-fokszámkorlátos, Benjamini-Schramm konvergens gráfsorozat és $\widetilde{D}$ a $\overline{D}$ zárt körlap egy nyílt környezete. Ekkor bármilyen $f : \widetilde{D} \to \mathbb{C}$ holomorf függvényre a*

$$\int_D f(z) d\mu_{G_n}(z)$$

sorozat konvergens.

Jelölje ln a komplex logaritmusfüggvény reguláris ágát. Egy G egyszerű gráfra és $z \in \mathbb{C}$-re legyen

$$\mathrm{t}_G(z) = \frac{\ln \mathrm{ch}_G(z)}{|V(G)|},$$

ahol ez jól definiált. A statisztikus fizika $\mathrm{t}_G(z)$-t a z-beli szabadenergiának nevezi. Borgs, Chayes, Kahn és Lovász a közelmúltban bizonyították [11], hogy ha (G_n) egy d-fokszámkorlátos, Benjamini-Schramm konvergens gráfsorozat, akkor $\mathrm{t}_{G_n}(q)$ minden $q > 2d$ egészre konvergens. A 2.1. Tétel alapján többet is állíthatunk:

2.2. Tétel. *Legyen (G_n) egy d-fokszámkorlátos, Benjamini-Schramm konvergens gráfsorozat, amire $|V(G_n)| \to \infty$. Ekkor $\mathrm{t}_{G_n}(z)$ egy valós analitikus függvényhez konvergál a $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ halmazon.*

Speciálisan $\mathrm{t}_{G_n}(z)$ minden $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$-re konvergens. A 2.2. Tétel megválaszolja Borgs egy kérdését is [10, 2. kérdés] arról, hogy a szabadenergia milyen körülmények között konvergens, illetve hogy a limesz analitikus-e $1/z$-ben. (Ez amenábilis kvázitranzitív gráfok Følner-sorozataira már korábban is ismert volt [42].)

A μ_{G_n} mértékek gyenge konvergenciája általában nem igaz, de több természetes gráfsorozatra is teljesül. Legyen például $T_n = C_4 \times P_n$ a „$4\times n$-es cső”, vagyis a 4 hosszú kör és az n hosszú út Descartes-szorzata. T_n a cső végeitől eltekintve egy 4-reguláris gráf.

2.3. Állítás. *A μ_{T_n} kromatikus mértékek gyengén konvergensek.*

Egy másik érdekes eset, amikor a G gráf derékbősége (a legrövidebb kör hossza) nagy. Ilyenkor megmutathatjuk, hogy

$$\int_D z^k d\mu(z) = \frac{|E(G)|}{|V(G)|} \quad (1 \leq k \leq \mathrm{girth}(G) - 2),$$

vagyis az összes momentum azonos, amíg a derékbőséget el nem érjük (ld. 2.13. Lemma). Ebből az következik, hogy d-reguláris gráfok egy végtelenhez tartó derékbőségű G_n sorozatára a szabadenergia határértéke

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{t}_{G_n}(z) = \ln q + \frac{d}{2} \ln(1 - \frac{1}{q}),$$

ha $q > Cd$. Ez a [6] cikk egyik fő eredménye, igaz, ők $q > d+1$-re bizonyítják, itt pedig csak $q > Cd$-re jött ki. A mi módszerünk előnye, hogy explicit becslést is ad a nagy derékbőségű gráfok helyes színezéseinek számára.

2.4. Tétel. *Legyen G egy g derékbőségű véges gráf, aminek a maximális foka d. Ekkor bármely $q > Cd$-re*

$$\left| \frac{\ln \mathrm{ch}_G(q)}{|V(G)|} - \left(\ln q + \frac{|E(G)|}{|V(G)|} \ln(1 - \frac{1}{q}) \right) \right| \leq 2\frac{(Cd/q)^{g-1}}{1 - Cd/q}.$$

Eredmények a 3. fejezetből:

3.1. Definíció. *Legyen L egy végtelen csúcstranzitív rács. Definiáljuk a ρ_L* párosítás-mértéket *L v-ből induló útfájának a spektrálmértékeként, ahol v az L tetszőleges csúcsa.*

Egy G véges gráfra legyen ρ_G *párosítás-mértéke* az egyenletes mérték $\mu(G, x)$ gyökein. Godsil korábbi eredménye [25] alapján megmutatjuk, hogy ρ_L előáll ρ_{G_n} határértékeként.

3.2. Tétel. *Legyen L egy végtelen csúcstranzitív rács és G_n tartson L-hez Benjamini-Schramm értelemben. Ekkor ρ_{G_n} gyengén konvergál ρ_L-hez és $\lim_{n\to\infty} \rho_{G_n}(\{x\}) = \rho_L(\{x\})$ bármely $x \in \mathbb{R}$-re.*

Legyen G véges gráf és jelölje $|G|$ a csúcsok számát, továbbá legyen $m_k(G)$ a k élű párosítások száma ($m_0(G) = 1$). Egy t nemnegatív valós számra

$$M(G,t) = \sum_{k=0}^{\lfloor |G|/2 \rfloor} m_k(G) t^k.$$

$M(G,t)$-t a G párosítás-generáló függvényének vagy a monomer-dimer modell partíciófüggvényének nevezzük. Értelemszerűen pont ugyanazt az információt tartalmazza, mint a párosítás-polinom. Legyen

$$p(G,t) = \frac{2t \cdot M'(G,t)}{|G| \cdot M(G,t)}$$

és

$$F(G,t) = \frac{\ln M(G,t)}{|G|} - \frac{1}{2} p(G,t) \ln(t).$$

Itt

$$\tilde{\lambda}(G) = F(G,1)$$

az ún. monomer-dimer szabadenergia.

A $p = p(G,t)$ függvény szigorúan monoton növő módon képezi a $[0,\infty)$ intervallumot a $[0,p^*)$-ba, ahol $p^* = \frac{2\nu(G)}{|G|}$ és $\nu(G)$ jelöli a maximális párosítás méretét. Ha G-ben van teljes párosítás, akkor $p^* = 1$. Tehát a $t = t(G,p)$ inverz függvény a $[0,p^*)$ intervallumot képezi a $[0,\infty)$-be. (Ha G a kontextusból egyértelmű, egyszerűen csak $t(p)$-t írunk $t(G,p)$ helyett.) Legyen

$$\lambda_G(p) = F(G, t(p))$$

ha $p < p^*$ és $\lambda_G(p) = 0$ ha $p > p^*$. Ezzel egyelőre még nem definiáltuk $\lambda_G(p^*)$-ot, amit határértékként értelmezünk:

$$\lambda_G(p^*) = \lim_{p \nearrow p^*} \lambda_G(p).$$

A 3.15. Állítás (d) részében megmutatjuk, hogy ez a határérték valóban létezik. Utána kiterjesztjük $p(G,t), F(G,t)$ és $\lambda_G(p)$ definícióját végtelen L rácsokra is.

$\lambda_G(p)$ intuitív jelentése a következő: Tegyük fel, hogy szeretnénk megszámolni azokat a párosításokat, amik a csúcsok p részét fedik. Ennek akkor van értelme, ha $p = \frac{2k}{|G|}$ valamilyen k-ra, ilyenkor $m_k(G)$-t kell meghatároznunk. Ebben az esetben

$$\lambda_G(p) \approx \frac{\ln m_k(G)}{|G|}.$$

A fenti közelítő jellemzés pontos változata a 3.15. Állításban szerepel.

A következőkben megmutatjuk, hogyan terjeszthető ki $\lambda_G(p)$ definíciója végtelen L rácsokra, illetve adunk egy hatékony módszert a kiszámítására, feltéve, hogy p eléggé el van választva p^*-tól.

3.16. Tétel. *Legyen (G_n) korlátos fokú gráfok egy Benjamini-Schramm konvergens sorozata. Ekkor a*

(a)

$$p(G_n, t) \text{ és}$$

(b)

$$\frac{\ln M(G_n, t)}{|G_n|}$$

függvények sorozata egy szigorúan monoton növő folytonos függvényhez konvergál a $[0, \infty)$ intervallumon. Ha ezen kívül minden G_n-ben van teljes párosítás, akkor a

(c)

$$t(G_n, p) \text{ és}$$

(d)

$$\lambda_{G_n}(p)$$

függvények sorozata is konvergens minden $0 \leq p < 1$-re.

3.18. Definíció. *Legyen L egy végtelen rács és (G_n) véges gráfok egy Benjamini-Schramm konvergens sorozata, ami L-hez tart. Például G_n választható L egy kimerítésének. Ekkor a (ρ_{G_n}) mértékek gyengén konvergálnak egy mértékhez, amit az L rács párosítás-mértékének nevezünk és ρ_L-lel jelölünk. Legyen $t > 0$-ra*

$$p(L, t) = \int \frac{tz^2}{1 + tz^2} \, d\rho_L(z)$$

és

$$F(L, t) = \int \frac{1}{2} \ln \left(1 + tz^2\right) \, d\rho_L(z) - \frac{1}{2} p(L, t) \ln(t).$$

Az L rács monomer-dimer szabadenergiája

$$\tilde{\lambda}(L) = F(L,1) = \int \frac{1}{2} \ln\left(1+z^2\right)\, d\rho_L(z)$$

A következő táblázatban néhány numerikus eredmény látható.

Rács	$\tilde{\lambda}(L)$	Hibakorlát	$p(L,1)$	Hibakorlát
2d	0,6627989725	$3{,}72 \cdot 10^{-8}$	0,638123105	$5{,}34 \cdot 10^{-7}$
3d	0,7859659243	$9{,}89 \cdot 10^{-7}$	0,684380278	$1{,}14 \cdot 10^{-5}$
4d	0,8807178880	$5{,}92 \cdot 10^{-6}$	0,715846906	$5{,}86 \cdot 10^{-5}$
5d	0,9581235802	$4{,}02 \cdot 10^{-5}$	0,739160383	$3{,}29 \cdot 10^{-4}$
6d	1,0237319240	$1{,}24 \cdot 10^{-4}$	0,757362382	$8{,}91 \cdot 10^{-4}$
7d	1,0807591953	$3{,}04 \cdot 10^{-4}$	0,772099489	$1{,}95 \cdot 10^{-3}$
hex	0,58170036638	$1{,}56 \cdot 10^{-9}$	0,600508638	$2{,}65 \cdot 10^{-8}$

Általában a ρ_L mértékben lehetnek atomok. Például ha G egy véges gráf, akkor ρ_G egyértelműen csak atomokból áll. Ugyanakkor megmutatható, hogy a fenti táblázatban szereplő rácsokra a ρ_L mérték atommentes.

3.22. Tétel. *Legyen L egy olyan rács, ami teljesíti az alábbi két feltétel egyikét.*

(a) Az L rács megkapható G_n véges gráfok Benjamini-Schramm limeszeként, ahol G_n lefedhető $o(|G_n|)$ pontdiszjunkt úttal.

(b) Az L rács megkapható összefüggő csúcstranzitív véges gráfok Benjamini-Schramm limeszeként.

Ekkor a ρ_L párosítás-mérték atommentes.

Eredmények a 4. fejezetből:

A G gráfot *pozitívnak* nevezzük, ha $\hom(G,H) \geq 0$ minden H élsúlyozott gráfra (ahol a súlyok negatívak is lehetnek). Szeretnénk jellemezni a pozitív gráfokat, ezért ebben a fejezetben felvetünk egy sejtést és megpróbáljuk néhány részeredménnyel alátámasztani.

Egy gráfot *szimmetrikusnak* nevezünk, ha csúcsai egy (S, A, B) hármasba particionálhatóak olyan módon, hogy az S-beli csúcsok egy üres gráfot feszítenek, A és B között nincsen él, továbbá létezik egy izomorfizmus $S \cup A$ és $S \cup B$ között, ami S-et fixen hagyja.

4.1. Sejtés. *Egy G gráf akkor és csak akkor pozitív, ha szimmetrikus.*

A sejtés „akkor" része könnyű.

4.2. Lemma. *Ha a G gráf szimmetrikus, akkor pozitív.*

Fordított irányban csak részeredményeink vannak. Meg fogjuk mutatni, hogy a sejtés igaz fákra (4.20. Következmény) és minden legfeljebb 9 csúcsú gráfra (ld. 4.5. fejezet).

Először is bebizonyítunk néhány állítást a pozitív gráfokról. Ezek természetesen a szimmetrikus gráfokra is teljesülni fognak.

4.3. Lemma. *Ha G pozitív, akkor páros sok éle van.*

Egy homomorfizmust *párosnak* nevezünk, ha minden élnek páros sok ősképe van.

4.4. Lemma. *Ha G pozitív, akkor létezik páros homomorfizmus G-ről önmagára.*

Ha G_1 és G_2 hurokélektől eltekintve egyszerű gráfok, akkor $G_1 \times G_2$ jelölje a *kategorikus szorzatukat*, amit így definiálunk:

$$\begin{aligned}
&V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2),\\
&E(G_1 \times G_2) = \big\{\big((i_1, i_2), (j_1, j_2)\big) :\ (i_1, j_1) \in E(G_1), (i_2, j_2) \in E(G_2)\big\}.
\end{aligned}$$

Legyen K_n^+ a teljes gráf az $[n]$ csúcshalmazon, az összes csúcson egy-egy hurokéllel, ahol $n \geq |V(G)|$.

4.5. Tétel. *Ha G pozitív, akkor létezik egy $f : G \to K_n^+ \times G$ páros homomorfizmus, amire $\big|f(V(G))\big| \geq \frac{1}{2}\big|V(G)\big|$.*

A következőkben kiépítünk egy technikát, amivel egy pozitív gráf csúcsait úgy particionálhatjuk, hogy az egyes osztályok által feszített részgráfok szintén pozitívak legyenek. Az alapötlet az, hogy lekorlátozzuk, milyen $p : V \to [0, 1]$ leképezésekre vett átlag pozitivitását vizsgáljuk. Az ötlet rekurzív alkalmazásával végül elérhetjük, hogy csak olyan leképezésekkel kelljen foglalkoznunk, amik az egyes partíciókat a $[0, 1]$ diszjunkt részhalmazaiba viszik. Ebből már következik a feszített részgráfok pozitivitása.

Első lépésként bevezetjük az $\mathcal{F}$-pozitivitás fogalmát. Legyen $G = (V, E)$ egyszerű gráf. Egy mérhető $\mathcal{F} \subseteq [0, 1]^V$ halmazra és $\omega :\ [0, 1] \to (0, \infty)$ korlátos mérhető súlyfüggvényre legyen

$$t(G, W, \omega, \mathcal{F}) = \int\limits_{p\in\mathcal{F}} \hom(G, W, \omega, p)\, \mathrm{d}p, \tag{1}$$

ahol egy $p : V \to [0, 1]$ leképezés *súlya*

$$\hom(G, W, \omega, p) = \prod_{v\in V} \omega\big(p(v)\big) \prod_{e\in E} W\big(p(e)\big). \tag{2}$$

Jelölje μ azt a mértéket, aminek ω a sűrűségfüggvénye (azaz $\mu(X) = \int_X \omega$), ekkor

$$t(G, W, \omega, \mathcal{F}) = \int\limits_{\mathcal{F}} \prod_{e\in E} W\big(p(e)\big)\, \mathrm{d}\mu^V(p). \tag{3}$$

Azt mondjuk, hogy G *$\mathcal{F}$-pozitív*, ha bármely W magfüggvényre és fenti típusú ω-ra $t(G, W, \omega, \mathcal{F}) \geq 0$. Könnyen látszik, hogy G pontosan akkor $[0, 1]^V$-pozitív, ha pozitív.

Egy $\mathcal{P}$ partícióra, ami a $[0, 1]$-et véges sok pozitív mértékű részre osztja és egy $\pi :\ V \to \mathcal{P}$ függvényre az $\mathcal{F}(\pi) = \{p \in [0, 1]^V :\ p(v) \in \pi(v)\ \forall v \in V\}$ halmazt *partíció-doboznak* nevezzük. Másképp megfogalmazva egy partíció-doboz egy $\prod_{v\in V} S_v$ direkt szorzat, ahol az $S_v \subseteq [0, 1]$ halmazok mérhetőek és minden $u, v \in V$-re vagy $S_u \cap S_v = \emptyset$, vagy $S_u = S_v$.

A V csúcshalmaz egy $\mathcal{N}$ partícióját *pozitívnak* nevezzük, ha bármely fenti típusú $\mathcal{P}$ partícióra és $\pi : V \to \mathcal{P}$ függvényre, amire $\pi^{-1}(\mathcal{P}) = \mathcal{N}$ teljesül, G $\mathcal{F}(\pi)$-pozitív.

Egy (G, v) gyökeres gráf *sétafája* a következő $R(G, v)$ végtelen gyökeres gráf: a csúcsai a v-ből induló véges séták, a gyökere a 0 hosszú séta és bármely más séta szülője az, amit az utolsó csúcsának a törlésével kapunk. A V csúcshalmaz $\mathcal{R}$ *sétafa-partíciója* az a partíció, ahol u és v akkor és csak akkor tartozik egy osztályba, ha $R(G, u) \cong R(G, v)$.

4.16. Állítás. *Ha a G gráf pozitív, akkor a sétafa-partíciója is pozitív.*

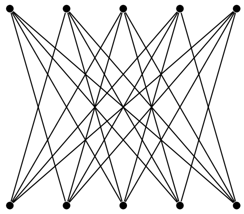
4.17. Következmény. *Legyen $G(V, E)$ egy pozitív gráf, és $S \subset V$ a sétafa-partíciójából néhány osztály uniója. Ekkor $G[S]$ szintén pozitív.*

4.18. Következmény. *Ha G pozitív, akkor bármely k-ra a k-adfokú csúcsok által feszített részgráf is pozitív.*

4.19. Következmény. *Páratlan k-ra a k-adfokú csúcsok száma egy pozitív G-ben páros.*

4.20. Következmény. *Fákra teljesül a 4.1. Sejtés.*

A fenti eredmények alapján egy számítógépes program segítségével leellenőriztük a 4.1. Sejtést minden legfeljebb 10 csúcsú gráfra. Azt tapasztaltuk, hogy minden pozitív gráf szimmetrikus, egyetlen lehetséges kivétellel: az alábbi gráf biztosan nem szimmetrikus, de a pozitivitását nem tudtuk eldönteni.



Irodalomjegyzék

[1] M. Abért, P. Csikvári, P. E. Frenkel and G. Kun: *Matchings in Benjamini–Schramm convergent graph sequences*, arXiv:1405.3271, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[2] M. Abért and T. Hubai: *Benjamini–Schramm convergence and the distribution of chromatic roots for sparse graphs*, arXiv:1201.3861, to appear in Combinatorica

[3] M. Abért, P. Csikvári and T. Hubai: *Matching measure, Benjamini–Schramm convergence and the monomer-dimer free energy*, arXiv:1405.6740

[4] M. Abért, A. Thom and B. Virág: *Benjamini-Schramm convergence and pointwise convergence of the spectral measure*, preprint at `http://www.renyi.hu/~abert/`

[5] S. E. Alm: *Upper bounds for the connective constant of self-avoiding walks*, Comb. Probab. Comp. **2**, pp. 115–136

[6] A. Bandyopadhyay and D. Gamarnik, *Counting without sampling. Asymptotics of the logpartition function for certain statistical physics models*, Random Structures & Algorithms 33 (2008)

[7] R. J. Baxter: *Dimers on a rectangular lattice*, J. Math Phys. **9** (1968), pp. 650–654

[8] I. Benjamini and O. Schramm, *Recurrence of distributional limits of finite planar graphs*, Electron. J. Probab. 6 (2001), no. 23, 13 pp.

[9] G. D. Birkhoff: *A Determinant Formula for the Number of Ways of Coloring a Map*, Annals of Mathematics 14 (1912) 42–46.

[10] C. Borgs, *Absence of Zeros for the Chromatic Polynomial on Bounded Degree Graphs*, Combinatorics, Probability and Computing 15 (2006), 63–74.

[11] C. Borgs, J. Chayes, J. Kahn and L. Lovász, *Left and right convergence of graphs with bounded degree*, Random Structures & Algorithms 42 (2013)

[12] C. Borgs, J.T. Chayes, L. Lovász, V.T. Sós, and K. Vesztergombi: *Convergent Graph Sequences I: Subgraph frequencies, metric properties, and testing*, Advances in Math. **219** (2008), 1801–1851.

[13] P. Butera, P. Federbush and M. Pernici: *Higher order expansion for the entropy of a dimer or a monomer-dimer system on d-dimensional lattices*, Physical Review E**87**, 062113 (2013)

[14] P. Butera and M. Pernici: *Yang-Lee edge singularities from extended activity expansions of the dimer density for bipartite lattices of dimensionality* $2 \leq d \leq 7$, Physical Review E**86**, 011104 (2012)

[15] O. A. Camarena, E. Csóka, T. Hubai, G. Lippner and L. Lovász: *Positive graphs*, arXiv:1205.6510, to appear in European J. Comb.

[16] P. Csikvári and P. E. Frenkel, *Benjamini–Schramm continuity of root moments of graph polynomials*, arXiv:1204.0463

[17] J. N. Darroch: *On the distribution of the number of successes in independent trials*, Ann. Math. Statist. **35**, pp. 1317–1321

[18] B. L. Douglas: *The Weisfeiler-Lehman Method and Graph Isomorphism Testing*, arXiv:1101.5211

[19] H. Duminil-Copin and S. Smirnov: *The connective constant of the honeycomb lattice equals* $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, Ann. of Math. (2) **175**(3), pp. 1653–1665

[20] G. Elek and G. Lippner: *Borel oracles. An analytical approach to constant-time algorithms*, Proc. Amer. Math. Soc. **138**(8) (2010), pp. 2939–2947.

[21] M. E. Fisher: *Statistical mechanics of dimers on a plane lattice*, Phys. Rev. **124** (1961), pp. 1664–1672

[22] S. Friedland and L. Gurvits, *Lower bounds for partial matchings in regular bipartite graphs and applications to the monomer-dimer entropy*, Combinatorics, Probability and Computing 17 (2008), 347-361.

[23] S. Friedland and U. N. Peled: *Theory of Computation of Multidimensional Entropy with an Application to the Monomer-Dimer Problem*, Advances of Applied Math. **34** (2005), pp. 486–522

[24] D. Gamarnik and D. Katz: *Sequential cavity method for computing free energy and surface pressure*, J Stat Phys **137** (2009), pp. 205–232

[25] C. D. Godsil: *Algebraic Combinatorics*, Chapman and Hall, New York 1993

[26] L. Gurvits: *Unleashing the power of Schrijver's permanental inequality with the help of the Bethe Approximation*, arXiv:1106.2844v11

[27] T. Hara, G. Slade and A. D. Sokal: *New lower bounds on the self-avoiding-walk connective constant*, J. Statist. Phys. **72** (1993), pp. 479–517

[28] J. M. Hammersley: *Existence theorems and Monte Carlo methods for the monomer-dimer problem.* In: David, F.N. (ed.) Research Papers in Statistics: Festschrift for J. Neyman, pp. 125–146. Wiley, London (1966)

[29] J. M. Hammersley: *An improved lower bound for the multidimensional dimer problem.* Proc. Camb. Philos. Soc. **64** (1966), pp. 455–463

[30] J. M. Hammersley, V. Menon: *A lower bound for the monomer-dimer problem.* J. Inst. Math. Appl. **6** (1970), pp. 341–364

[31] H. Hatami: *Graph norms and Sidorenko's conjecture*, Israel J. Math. **175** (2010), 125–150.

[32] O. J. Heilmann and E. H. Lieb: *Theory of monomer-dimer systems*, Commun. Math. Physics **25** (1972), pp. 190–232

[33] Y. Huo, H. Liang, S. Q. Liu, F. Bai: *Computing the monomer-dimer systems through matrix permanent*, Phys. Rev. E **77** (2008)

[34] P. W. Kasteleyn: *The statistics of dimers on a lattice, I: the number of dimer arrangements on a quadratic lattice*, Physica **27** (1961), pp. 1209–1225

[35] C. Y. Ku and W. Chen: *An analogue of the Gallai–Edmonds Structure Theorem for non-zero roots of the matching polynomial*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **100** (2010), pp. 119–127

[36] L. Lovász: *Large Networks and Graph Limits*, Colloquium Publications, vol. 60. American Mathematical Society (2012)

[37] L. Lovász: *Subgraph densities in signed graphons and the local Sidorenko conjecture*, arXiv:1004.3026

[38] L. Lovász, B. Szegedy: *Limits of dense graph sequences*, J. Comb. Theory B **96** (2006), 933–957.

[39] R. Lyons, *Asymptotic enumeration of spanning trees*, Combinatorics, Probability and Computing 14 (2005), 491–522.

[40] S. N. Mergelyan, *Uniform approximations to functions of a complex variable*, Uspehi Mat. Nauk (N.S.) 7 (48) (1952), 31–122.

[41] H. N. Nguyen and K. Onak, *Constant-time approximation algorithms via local improvements*, 49th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (2008), pp. 327–336.

[42] A. Procacci, B. Scoppola and V. Gerasimov: *Potts model on infinite graphs and the limit of chromatic polynomials.* Commun. Math. Phys. 235 (2003), 215–231.

[43] G. C. Rota, *On the foundations of combinatorial theory I. Theory of Möbius functions*, Probability theory and related fields 2 (4) (1964), 340–368.

[44] H. N. V. Temperley and M. E. Fisher: *Dimer problem in statistical mechanics–an exact result*, Philos. Mag. **6** (1961), pp. 1061–1063

[45] J. Salas and A.D. Sokal, *Transfer Matrices and Partition-Function Zeros for Antiferromagnetic Potts Models V. Further Results for the Square-Lattice Chromatic Polynomial*, J Stat Phys 135 (2009), 279–373.

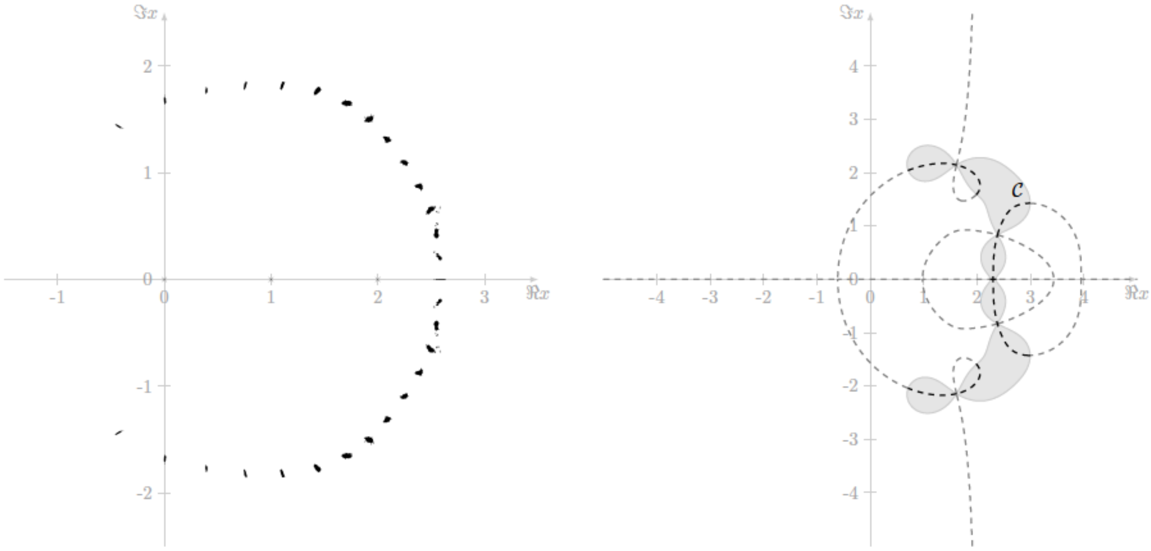
[46] A. D. Sokal: *Bounds on the complex zeros of (di)chromatic polynomials and Potts-model partition functions*, Combinatorics, Probability and Computing 10 (2001), 41–77.

[47] A. D. Sokal, *The multivariate Tutte polynomial (alias Potts model) for graphs and matroids*, In: Webb, BS, (ed.) Surveys in Combinatorics, 2005, 173–226. Cambridge University Press

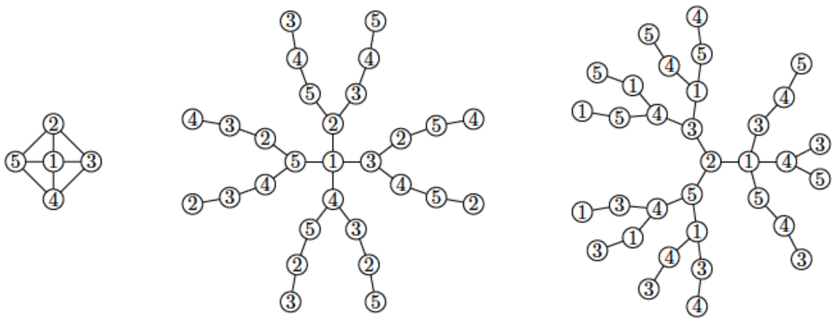
[48] A. Thom: *Sofic groups and diophantine approximation*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. LXI, (2008), 1155–1171

[49] B. Weisfeiler and A.A. Lehman: *A reduction of a graph to a canonical form and an algebra arising during this reduction (in Russian)*, Nauchno-Technicheskaya Informatsia, Seriya 2, **9** (1968), 12–16.

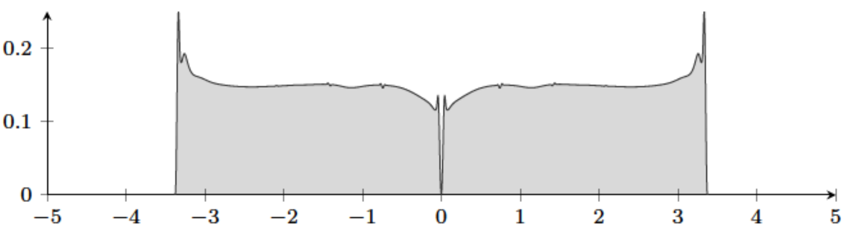
Ábrák



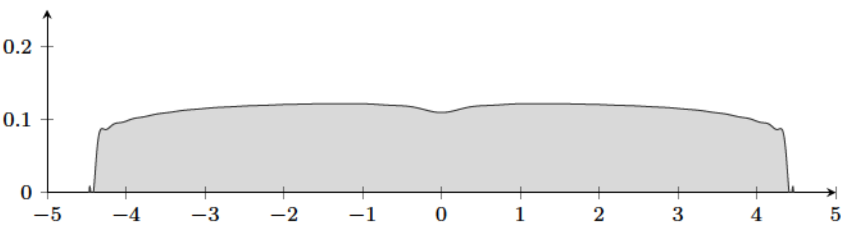
Bal: a 30368 db 32 csúcsú 3-reguláris 7 derékbőségű gráf kromatikus gyökei
Jobb: $T_n = C_4 \times P_n$ kromatikus gyökeinek lehetséges határértékei, ha $n \to \infty$



A piramis-gráf és az ①-ből ill. ②-ből induló útfái



$\mathbb{Z}^2$ párosítás-mértékének egy közelítése



$\mathbb{Z}^3$ párosítás-mértékének egy közelítése